# Chyby a neistoty meraní v procese snímania dát počas kampane z rôznych prevádzkových situácií v jadrových elektrárňach

# Measurement errors and uncertainties in the process of data capture during the campaign of various operational situations at nuclear power plants

***Vladimír Liška, UIAM MTF STU v Trnave***

**Abstract:** In this article we deal with measurement errors and uncertainties in the process of long term data capture, needed to develop empirical models, during the campaign of various operational situations at nuclear power plants. We show methods of statistical processing of measured values and calculate errors of direct and indirect measurements.

**Key words:** direct and indirect measurements

**Abstrakt:** V článku sa zaoberáme chybami a neistotami meraní v procese dlhodobého snímania dát, potrebných pre vývoj empirických modelov, počas kampane z rôznych prevádzkových situácií v jadrových elektrárňach. Ukážeme spôsoby štatistického spracovania nameraných hodnôt a výpočet chýb priamych a nepriamych meraní.

**Kľúčové slová:** priame a nepriame merania

## 1. Úvod

Pod pojmom meranie najčastejšie rozumieme zistenie číselnej hodnoty fyzikálnej veličiny v stanovených jednotkách SI. Každé meranie je zaťažené chybami, teda je realizované len s určitou presnosťou. Chyby merania, ktorých sa dopúšťame, môžu byť spôsobené mnohými okolnosťami: nepresnosťou použitých meracích prístrojov, zmenou vonkajších podmienok merania, nevhodnosťou zvolených metód merania ako aj nedokonalosťou zmyslov experimentátora.[2],[3]

Skutočná (pravá) hodnota je ideálny pojem a možno ju získať dokonalým meraním. Potom číselný rozdiel medzi nami nameranou hodnotou $x$ a skutočnou hodnotou $X$ nazývame *absolútna chyba merania*

$$\varepsilon = X - x = \Delta X \,.$$

Skutočná hodnota merania sa teda nachádza v intervale

$$X \in \langle x - \varepsilon, x + \varepsilon \rangle \,.$$

Ak vyjadríme chybu relatívne k meranej veličine, hovoríme o *relatívnej chybe merania*

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta X}{X} = 1 - \frac{x}{X} \,,$$

ktorá sa často udáva v percentách

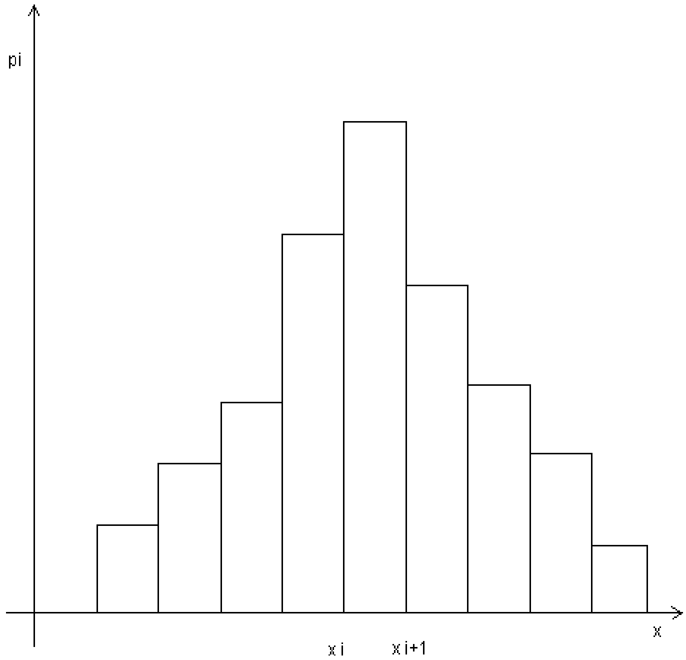
$$\varepsilon_r = \frac{\Delta X}{X} 100\% \,.$$

## 2. Štatistické spracovanie nameraných hodnôt

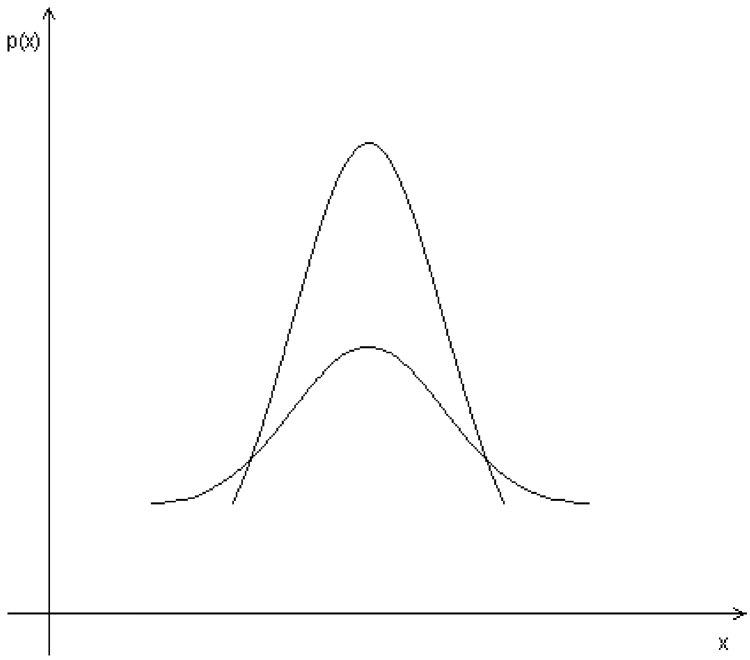
Nech $x$ je fyzikálna veličina a $n$ je počet jej nezávislých meraní. Relatívna početnosť výskytu nameranej hodnoty v intervale $\langle x_i, x_{i-1} \rangle$ je definovaná podielom počtu hodnôt, ktoré padnú do daného intervalu k celkovému počtu nameraných hodnôt $p_i = \frac{n_i}{n}$, často udávaná v percentách $p_i = \frac{n_i}{n} 100\%$. Zostrojíme histogram tak, že $x$-ovú os predstavujúcu hodnoty nameranej veličiny $x$ rozdelíme na intervaly. Nad každým intervalom zostrojíme obdĺžnik s druhou stranou rovnou relatívnej početnosti výskytu hodnôt v intervale. Je zrejmé, že skutočná (pravá ) hodnota je v blízkosti modusu histogramu.

Zväčšovaním počtu meraní sa tiež spresňuje skutočná hodnota meranej veličiny. Limitným priblížením $n \to \infty$ a zmenšením intervalu $\Delta x = x_i - x_{i+1} \to 0$ je možné histogram relatívnej početnosti nahradiť funkciou hustoty pravdepodobnosti rozdelenia $p(x)$. Integrovaním tejto funkcie na intervale $\langle x_i, x_{i-1} \rangle$ získame pravdepodobnosť, kedy nameraná hodnota bude ležať práve v tomto intervale. Vo väčšine experimentálnych meraní sa funkcia $p(x)$ dá aproximovať *Gaussovým normálnym rozdelením*

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(\bar{x}-x)^2}{2\sigma^2}} \,.$$




*Obr.1. Histogram*




*Obr. 2. Funkcie gaussovho normálneho rozdelenia, ktoré majú rovnakú strednú hodnotu a rozdielne disperzie*

Pre $\bar{x}$, strednú hodnotu veličiny $x$ platí

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) x dx ,$$

táto reprezentuje skutočnú hodnotu veličiny $X$ .

Disperzia (rozptyl) meranej veličiny je definovaná vzťahom

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{x} - x)^2 p(x) dx .$$

Stredná kvadratická chyba $\sigma$ udáva rozptyl nameraných hodnôt okolo strednej hodnoty $\bar{x}$ .[1],[4]

## 3. Určenie chyby priamych meraní

Predpokladajme, že výsledok merania môžeme pokladať za náhodnú veličinu riadiacu sa normálnym zákonom rozdelenia a dochádza len k náhodným chybám.

Ak meriame veličinu, ktorej skutočná hodnota je $X$ , potom hodnota i-teho merania je $x_i$ a chyba i-teho merania je $\varepsilon_i$ .

Teda platí

$$x_i = X \pm \varepsilon_i .$$

Meraním fyzikálnej veličiny získame súbor $n$ hodnôt $x_1, x_2, ..., x_n$ . K strednej hodnote $\bar{x}$ sa potom najviac blíži hodnota

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i1}^{n} x_i ,$$

ktorú nazývame *aritmetický priemer*. Je zrejmé, že so zväčšovaním počtu meraní sa bude hodnota $\bar{x}_n$ približovať k skutočnej hodnote.

Stredná kvadratická odchýlka merania, ktorá charakterizuje rozptyl merania je definovaná vzťahom

$$\delta_{x,n} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\bar{x}_n - x_i)^2} .$$

Štandardná odchýlka merania sa vypočíta podľa vzorca

$$S_{x,n} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\bar{x}_n - x_i)^2}\ .$$

Potom hodnota strednej kvadratickej chyby aritmetického priemeru je daná

$$\sigma(\bar{x}_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} S_{x,n} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(\bar{x}_n - x_i)^2}\ .$$

Presnosť hodnoty $\sigma(\bar{x}_n)$ je relatívna, t.j. pri počtoch opakovaní meraní $n < 100$ má zmysel chybu udávať iba na jedno desatinné miesto.

Interval spoľahlivosti určujeme vzhľadom na požadovanú mieru spoľahlivosti $P = \int_{x-Dx}^{x+Dx} p(x)dx$ a vzhľadom na stanovenie $\sigma(\bar{x}_n)$. Pre daný počet opakovaní určíme polovicu šírky intervalu spoľahlivosti zo vzťahu

$$Dx_n = t_{P,n}\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(\bar{x}_n - x_i)^2}\ ,$$

kde $t_{P,n}$ je Studentov koeficient, ktorý je pre vybrané prípady tabelovaný.

Výsledok merania uvádzame v tvare

$$x = \bar{x}_n \pm Dx_n,$$

pričom chybu merania aj aritmetický priemer zaokrúhlime na rovnaký počet desatinných miest.

Pomocou strednej kvadratickej chyby aritmetického priemeru definujeme aj strednú pravdepodobnú chybu aritmetického priemeru $\upsilon(\bar{x}_n) = \frac{2}{3}\sigma(\bar{x}_n)$ a strednú maximálnu chybu aritmetického priemeru $\chi(\bar{x}_n) = 3\sigma(\bar{x}_n)$.[5]

## 4. Určenie chyby priamych meraní

Nie každú fyzikálnu veličinu môžeme merať priamo, ako napr. priemer gule, teplotu roztoku, čas a pod. Veľa krát hodnotu fyzikálnej veličiny určujeme zo vzťahu v ktorom vystupuje viac veličín. Každú y nich meriame zvlášť a teda sa pri určovaní každej dopúšťame chýb. V ďalšom ukážeme ako určíme chybu fyzikálnej veličinu, ktorú získame výpočtom z hodnôt ďalších veličín.

Uvažujme fyzikálnu veličinu $V$ určenú funkciou

$$V = f(a, b, c, ...),$$

kde $a, b, c, ...$ sú veličiny, ktoré sa merajú priamo.

Ak $a = \bar{a} \pm \sigma(a), b = \bar{b} \pm \sigma(b), c = \bar{c} \pm \sigma(c), ...$ sú už namerané a štatisticky vyhodnotené veličiny, kde $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, ...$ sú ich najpravdepodobnejšie hodnoty a $\sigma(a), \sigma(b), \sigma(c), ...$ sú chyby, potom najpravdepodobnejšia hodnota veličiny $V$ je

$$V = f(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, ...).$$

Výsledná stredná kvadratická chyba veličiny je daná vzorcom

$$\sigma(V) = \sqrt{\left(\frac{\partial f(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, ...)}{\partial a}\right)^2 (\sigma(a))^2 + \left(\frac{\partial f(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, ...)}{\partial b}\right)^2 (\sigma(b))^2 + \left(\frac{\partial f(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, ...)}{\partial c}\right)^2 (\sigma(c))^2 + ...},$$

kde $\sigma(a), \sigma(b), \sigma(c), ...$ sú stredné kvadratické chyby.[5]

## 5. Zoznam bibliografických odkazov

(1) B Brož, J. a kol.: Základy fyzikálích měření. Praha, SNP, 1967.

(2) K Kundracik, F.: Spracovanie experimentálnych dát. Bratislava, Univerzita Komenského, 1999. ISBN 80-223-1327-0

(3) http://fyzika.utc.sk/praktika/Ulohy/Uvod/chyby.pdf

(4) http://hockicko.uniza.sk/semestralky/prace/p22/teoria2.htm

(5) http://stargate.cnl.tuke.sk/~klimek/SKOLA/hotove%20labaky/FyzMerUvod.pdf

## 6. ACKNOWLEDGEMENTS

Európska únia
Európsky fond regionálneho rozvoja

This publication is the result of implementation of the project: “Increase of Power Safety of the Slovak Republic”(ITMS: 26220220077) supported by the Research & Development Operational Programme funded by the ERDF.

Operačný program VÝSKUM a VÝVOJ

## 7. Adresa autora:

Vladimír Liška, Mgr.
UIAM MTF STU v Trnave
Hajdóczyho 1
917 01 Trnava
Vladimir.liska@stuba,sk