Určenie výkonového spektra KDS pomocou teórie bieleho šumu

Power spectrum determination of KDS by the white noise theory

Maximilián Strémy, UIAM MTF STU v Trnave

Abstract: In the article are mentioned combined discrete dynamic systems and determination of their power spectrum especially aimed to the event activated part of the system and sample period by the white noise theory. White noise is a stationary random process in which the power spectral density is constant throughout the frequency range and using the Wiener-Chinčin relations we can determine the autocorrelation function too. It's possible to express the intensity of frequency-limited white noise by normal distribution of probability.

Key words: probability, combined system, power spectrum, white noise

Abstrakt: V článku sú uvedené kombinované diskrétne dynamické systémy (KDS) a určenie ich výkonového spektra zameraného najmä na udalostne riadenú časť systému a periódy vzorkovania prostredníctvom teórie bieleho šumu. Biely šum je náhodný stacionárny proces, v ktorom výkonová spektrálna hustota je konštantná v celom frekvenčnom rozsahu a s využitím Wiener-Chinčinových vzťahov môžeme určiť tiež jeho autokorelačnú funkciu. Je možné vyjadriť intenzitu frekvenčne obmedzeného bieleho šumu prostredníctvom normálneho rozdelenia pravdepodobnosti.

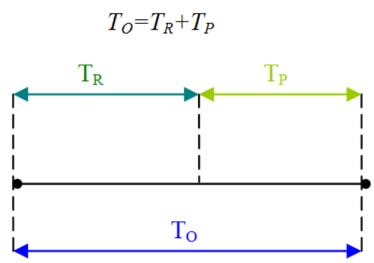
Kľúčové slová: Pravdepodobnosť, kombinovaný systém, výkonové spektrum, biely šum

1. ÚVOD

Kombinované dynamické systémy (KDS) zahŕňajú obidve časti diskrétneho systému: diskrétne časovo-aktivované dynamické systémy rovnako ako udalostne-riadené systémy. Výsledkom spojenia časovo-aktivovanej časti s udalostne riadenou časťou sú kombinované dynamické systémy, známe aj ako hybridné systémy. V prípade notácie „Hybridný systém" je používaná aj pri prepojení distribuovaného riadiaceho systému a programovateľného logického automatu, neurónových sietí, genetických algoritmov a fuzzy logiky, alebo kombinácie elektrických a mechanických výkonových jednotiek. Pre lepšiu identifikáciu bol zavedený pojem a koncept „Kombinovaného dynamického systému".

Takýto riadiaci dynamický systém pracuje s periódou vzorkovania T_O (cyklického spracovania) zodpovedajúcou Shannon-Koteľnikovej teoréme a času, potrebného na spracovania všetkých potrebných procesov v každom cykle vykonávania.

Všeobecne v dynamických systémoch sa uvažuje perióda vzorkovania T_O konštantná a zahrňuje len čas T_R potrebný na spracovanie všetkých nevyhnutných riadiacich a cyklicky opakujúcich sa procesov v danom systéme. Naproti tomu pri kombinovaných dynamických systémoch uvažujem periódu vzorkovania, nezávisle od toho či je konštantná alebo variabilná, rozšírenú o udalostnú časovú konštantu T_P potrebnú na vykonanie náhodných udalostí v systéme (obr. 1).



Obrázok 1: Perióda vzorkovania To

2. VÝKONOVÉ SPEKTRUM STOCHASTICKÉHO SIGNÁLU

Je známe, že pri harmonickej analýze deterministických procesov môžeme použiť ich vyjadrenie pomocou Fourierových radov, či Forierovho integrálu v závislosti od toho, či ide o periodické, alebo aperiodické procesy. Podobným spôsobom s využitím korelačnej analýzy môžeme charakterizovať rozloženie energie v stacionárnych náhodných procesoch, resp. ich vnútornú štruktúru a aplikovať tak tento postup pre potreby spektrálnej analýzy a optimalizáciu dynamických vlastností kombinovaných dynamických systémov.

Korelačná funkcia určuje mieru závislosti, resp. podobnosti signálu, prípadne signálov. Ak je predmetom analýzy jeden signál v rôznych časových okamžikoch, hovoríme o autokorelačnej funkcii. Pre periodické signály s periódou T má autokorelačná funkcia tvar

$$K(\tau)=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,f(t-\tau)\,dt ,$$

a pre neperiodické signály je vyjadrená v tvare

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(t-\tau) dt$$.

Na základe Wiener-Chinčinových vzťahov je možné vyjadriť vzájomný vzťah medzi autokorelačnou funkciou $K_x(\tau)$ stacionárneho stochastického procesu a jeho výkonovou spektrálnou hustotou $S_x(\omega)$ [1]. V prípade, že budú splnené nasledovné podmienky integrovania:

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) d\tau \leq M \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega \leq N$$,

kde M a N sú ľubovoľné konečné hodnoty, potom spomínané funkcie tvoria dvojicu vo Forierovej transformácii v nasledovnom tvare:

$$K_x(\tau) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$,

$$S_x(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau$$.

Pretože autokorelačná funkcia je reálna a párna, môžeme ju zapísať v tvare

$$K_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\infty} S_x(\omega) \cos(\omega t) d\omega$$.

Podobne môžeme vyjadriť aj funkciu spektrálnej hustoty:

$$S_x(\omega) = 4 \int_{0}^{\infty} K_x(\tau) \cos(\omega t) d\tau$$.

Ak $\tau=0$, výsledok bude nasledovný vzorec

$$K_x(0) = D_x = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\infty} S_x(\omega) d\omega$$,

ktorý je vlastne vyjadrením celkového stredného normovaného výkonu stacionárneho stochastického signálu. Podobne môžeme vyjadriť spektrálnu výkonovú hustotu pre $\omega=0$:

$$S_x(0) = 2\int_0^{\infty} K_x(\tau)d\tau$$
,

z ktorej je vidieť, že plocha pod krivkou autokorelačnej funkcie je úmerná hodnote výkonovej spektrálnej hustoty pre *ω=0*. Z vlastností Fourierovej transformácie tiež vyplýva, že čím frekvenčne užšia bude výkonová spektrálna hustota, tým širšia v časovej oblasti bude zodpovedajúca korelačná funkcia, teda napríklad, ak zúžime spektrum filtráciou, zväčší sa korelácia medzi vzdialenejšími hodnotami náhodného procesu a analogicky aj naopak, ak bude výkonové spektrum neobmedzene široké – napr. biely šum – bude autokorelačná funkcia neobmedzene úzka, a časovo najbližšie hodnoty v takomto náhodnom procese budú nekorelované.

3. APLIKÁCIA TEÓRIE BIELEHO ŠUMU NA STOCHASTICKÚ ČASŤ KDS

Teória o bielom šume je aplikovaná na kombinované dynamické systémy, pričom stochastická časť týchto systémov, približujúca sa k normálovému rozdeleniu pravdepodobnosti, je reprezentovaná ako proces o konštantnej a frekvenčne neobmedzenej intenzite spektrálnej hustoty energie. Zafarbenie bieleho šumu je predpokladané až vo vnútri samotného systému. S využitím predpokladov normálového rozloženia pravdepodobnosti odvodíme hodnotu intenzity Gaussovského bieleho šumu, resp. stochastickej udalostnej časti kombinovaných dynamických systémov.

Biely šum je stacionárnym náhodným procesom, u ktorého je výkonová spektrálna hustota konštantná v celom frekvenčnom rozsahu (obr. 2): [2]

$$K_x(\tau) = \frac{N_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau}d\omega = N\delta(\tau)$$

Disperziu frekvenčne ohraničeného bieleho šumu je možné pomocou intenzity zapísať v tvare: [3]

$$D = \sigma^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_m}^{\omega_m} N d\omega = \frac{N\Delta\omega}{2\pi} = N\Delta f$$
,

kde $\Delta\omega = 2\omega_m$.

Stredná kvadratická chyba σ je potom rovná

$$\sigma = \sqrt{N}\sqrt{\Delta f},$$

pričom pre frekvenčne ohraničený biely šum má autokorelačná funkcia tvar

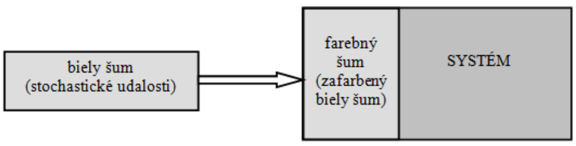
$$K_x(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\omega_m} N\cos\omega\tau d\omega = \frac{N}{\pi\tau}\sin\omega_m\tau.$$

Pri normálovom rozdelení pravdepodobnosti bude disperzia stochastického procesu rovná $D = 6\sigma$, po dosadení do rovnice (13) dostávame vyjadrenie intenzity náhodného procesu:

$$N = \frac{D}{\Delta f} = \frac{6\sigma}{\Delta f}.$$

4. ZÁVER

Na stanovanie T_P , času potrebného na obsluhu a vykonanie náhodných udalostí a ich servisných rutín v danom cykle, je možné využiť štatistické postupy a pravdepodobnostný odhad. Na stanovenie výkonového spektra je použitá teória bieleho šumu. Biely šum je teoretickým predpokladom – z praktického hľadiska je vstupom do systému farebný šum. V našom prípade vstup do systému, v podobe stochastických udalostí, odfarbíme, čím predpokladáme generovanie udalostí podliehajúcich požiadavkám bieleho šumu (príp. frekvenčne ohraničeného bieleho šumu), pričom zafarbenie je presunuté do samotného systému (obr. 2). Návrh a analýza tohto typu hybridných systémov má význam najmä vo v bezpečnostne-kritických aplikáciách a distribuovaných systémov riadenia[4].



Obrázok 2: Zafarbenie bieleho šumu vo vnútri systému

5. Zoznam bibliografických odkazov

[1]Левин, Б. Р. Теория случайных процессов и ее применение в радиотехнике. Москва : иэдателъство Советское радио, 1960. 662 s.

[2]Ondrácek, O. Signály a sústavy. Bratislava : STU, 2003. 341 s. ISBN 80-227-1875-0.

[3]Бесекерский, В.А., Попов, Е.П. Теория систем автоматического регулирования. Москва : издавательство <<Наука>>, 1975.

[4]Ždánsky, J., Hrbček, J., Šimák, V.: Using Hybrid Systems modeling to Design a ventilationSystem in RoadTunnel. In: *TechnicalcomputingPrague: 17th annualconferenceproceedings*: Kongresové centrum ČVUT, Prague, November 19, 2009. Humusoft, 2009, p.37 and CD, ISBN 978-80-7080-733-0

6. Adresa autora:

Maximilián Strémy, Ing. PhD.
UIAM MTF STU v Trnave
Hajdoczyho 1
91701 Trnava
maximilian.stremy@stuba.sk